Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей
Лекция 1.3

Аннотация

Необходимое и достаточное условия сходимости. Бесконечно большая последовательность. Бесконечно малая последовательность. Теоремы о конечных и бесконечных пределах. Число e и гиперболические функции.

1 Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если

$$\exists b > 0 \ \forall n \in N\colon |x_n| \le b.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если

$$\exists b \in R \ \forall n \in N\colon x_n \le b \ (x_n \ge b).$$

*Теорема (необходимое условие сходимости)**

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда по определению предела имеем: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon$.

© Семакин А.Н., 2017

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определния предела получаем, что $\exists n_1\ \forall n > n_1$: $|x_n - a| < 1$, где n_1 - это $n(\varepsilon)$, вычисленное для $\varepsilon = 1$.

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \le d,\ |x_2 - a| \le d,\ ...,\ |x_{n_1} - a| \le d$$

и

$$\forall n > n_1\text{: } |x_n - a| < 1 \le d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N\text{: } |x_n - a| \le d.$$

$\Rightarrow -d \le x_n - a \le d$,

$\Rightarrow a - d \le x_n \le a + d$,

$\Rightarrow$ последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ■

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если

$$\forall n \in N\text{: } x_n \le x_{n+1}\ (x_n \ge x_{n+1}).$$

Определение

Возрастающие и убывающие последовательности называются также **монотонными**.

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)

Всякая возрастающая (или убывающая) и ограниченная сверху (или снизу) последовательность имеет конечный предел.

© Семакин А.Н., 2017

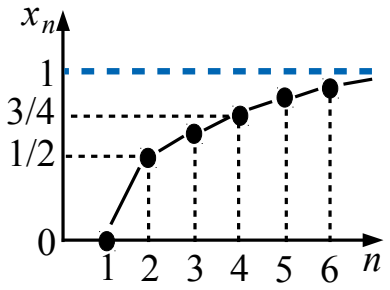
Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n\ x_n < 1$ (ограниченность),
$\forall n\ x_n < x_{n+1}$ (возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$



2 Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет **бесконечный предел**.

Частные случаи

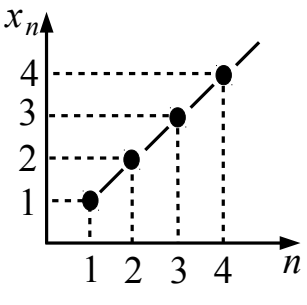
1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n > \varepsilon$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n < -\varepsilon$

Примеры:

Частные случаи

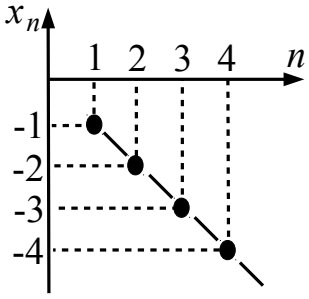
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

$x_n = n$



$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

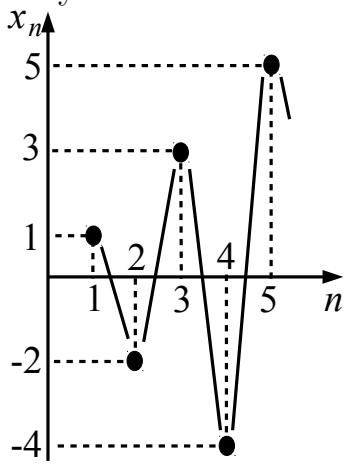
$x_n = -n$



Общий случай

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$



Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “+”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак “$-$”, если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности. Если направление движения однозначно определить нельзя, то знак перед ∞ не ставится.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

3) если $\{x_n\}$ - бесконечно малая, $\{y_n\}$ - ограниченная то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

© Семакин А.Н., 2017

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями определяется двумя теоремами.

*Теорема №1**

Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Rightarrow$

$\forall M > 0\ \exists n(M) \in N\ \forall n > n(M)$: $|x_n| > M$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|x_n|} = \left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \dfrac{1}{M}$

Обозначим: $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

Тогда имеем

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \{1/x_n\}$ - бесконечно малая. ■

Теорема №2

Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall n$: $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Символически эти теоремы можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$\{1/n\}$ - бесконечно малая, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

© Семакин А.Н., 2017

3 Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞, не рассматривается.

Теорема (единственность предела)
Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой только один предел.

Теорема (предельный переход в неравенствах)
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in \overline{R}$, и $\forall n : x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

4 Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции:

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r. По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год. Тогда через m лет размер вклада составит

$$K = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n \to \infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}.$$

© Семакин А.Н., 2017